التمرين الأول:(4.5نقط)

aعدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1 . نعتبر الدالة f المعرفة و القابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$:

$$f(x)=\sqrt{1+a.x^2}$$

1.تحقق أن الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

2.(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases}u_0=0\\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$

I) نفرض أن : $0 \prec a \prec 1$

أ)برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le u_n \le \dfrac{1}{\sqrt{1-a}}$.

ب) بين أن (u_n) متزايدة .

ج) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .ثم عين نهايتها.

II)نضع $a \succ 1$:

نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_{n+1}^2-u_n^2$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}^2-u_n^2=a^n$.

ج)من أجل كل عدد طبيعي n نعرف المتتالية (S_n)كالآتي :

$S_0=0$ و من أجل كل $n \ge 1$ ، $S_n=1+a+a^2+a^3+......+a^{n-1}$

تحقق أن من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=\dfrac{a^n-1}{a-1}$.

د) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\sqrt{S_n}$.ثم أحسب نهاية (u_n) .

التمرين الثاني:(4.5نقط)

1. a و bعددان طبيعيان مكتوبان في النظام ذي الأساس ثلاثة على الشكل $a=\overline{201}$ و $b=\overline{100}$

أكتب العددين a و b في النظام العشري .

2. x ، y عددان صحيحان و (E) المعادلة ذات المجهول $(x\,;\,y)$التالية :

$$ax-by=3$$

أ)بين أنه إذاكانت الثنائية $(x\,;\,y)$حلا للمعادلة (E) فإن : $x\equiv 0[3]$.

ب)إستنتج حلا خاصا $(x_0\,;\,y_0)$حيث $0 \le x_0 \prec 5$.ثم حل المعادلة (E) .

3.نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x\,;\,y)$حل للمعادلة (E).

أ)ماهي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب) بين ان $p\gcd(x,y)=p\gcd(y,3)$.

ج)عين الثنائيات $(x\,;\,y)$ حلول المعادلة (E) حتى يكون $\dfrac{y}{x}$ كسرا قابلا للإختزال .

4) (u_n) و (v_n) متتاليتان حسابيتان معرفتان على $\mathbb{N}$: $u_0=2$ ، $v_0=5$

$u_{n+1}=u_n+19$ و $v_{n+1}=v_n+9$

–عين كل الثنائيات $(p;q)$ للأعداد الطبيعية التي تحقق ، $u_p=v_q$ و $|q-p|\le 20$.

التمرين الثالث :(4نقط)

كيس فيه أربع كرات حمراء وكرتين سوداوين لا نفرق بينها عند اللمس.

العملية الأولى نسحب من الكيس عشوائيا كرتين في آن واحد .

نرمز بـ ، إلى الحوادث ، A_0 "لانحصل على أي كرة سوداء"

A_1"الحصول على كرة سوداء واحدة فقط"

A_2 "الحصول على كرتين سوداوين"

أحسب كل من $p(A_0)$ ، $p(A_1)$ و $p(A_2)$.

2.بعد عملية السحب الأول ،يبقى في الكيس أربع كرات .نقوم بالسحب الثاني إذ نسحب كرتين في آن واحدأيضا.

نرمز إلى الحوادث : B_0 "لانحصل على أي كرة سوداءفي السحب الثاني"

B_1"الحصول على كرة سوداء واحدة فقط في السحب الثاني "

B_2 "الحصول على كرتين سوداوين في السحب الثاني "

أ)أحسب كل من $p_{A_0}(B_0)$ ، $p_{A_1}(B_0)$ و $p_{A_2}(B_0)$.ثم بين أن $p(B_0)=\frac{2}{5}$.

ب)أحسب كل $p(B_1)$ و $p(B_2)$.

ج)بإفتراض أننا على كرة سوداء في السحب الثاني.ماإحتمال الحصول على كرة سوداءواحدة في السحب الأول؟

3. نعتبر الحادثة C "الحصول على كرتين سوداوين، بعد السحب الأول والإضرار إلى السحب الثاني " .

أحسب $p(C)$.

التمرين الرابع:(7نقط)

$I)$ 1. لتكن الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$بـ : $u(x)=xe^x$

أدرس إتجاه تغير الدالة uثم إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $xe^x\ge -\frac{1}{e}$.

2. gودالة معرفة على $]-\infty;0]$ بـ : $g(x)=1-(x^2+x+1)e^x$

أ–باستعمال إتجاه تغير الدالة g بين أن من أجل كل x من $]-\infty;0]$ ، $g(x)\ge 0$.

(لايطلب حساب نهاية g عند $-\infty$)

$II)$لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي:
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+1}{xe^x+1} & x\le 0 \\ f(x)=x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)+1 & x\succ 0 \end{cases}$$

ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.(الوحدة $2cm$)

1.أ) أدرس إستمرارية f عند 0 ؟

ب)أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند 0 .فسر النتيجة بيانيا.

2. أ)أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب)بين أن المستقيم (Δ)ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

ثم أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) على المجال $]-\infty;0]$.

3 .أ)أدرس اتجاه تغير الدالة f على $]-\infty;0]$ ،ثم على المجال $]0;+\infty[$.

(يمكن ملاحظة أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على $]-\infty;0]$).

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .

4. I نقطة من المنحنى (C) فاصلتها -1 .

أ)بين أن معادلة المماس (T) للمنحنى (C)عند النقطة I هي : $y=\frac{e}{e-1}(x+1)$.

ب)أدرس وضعية المنحنى (C)بالنسبة إلى المماس (T) . (إستعن بالإجابة المنجزة في I)1 .)

5. أنشئ (T)، (Δ) و (C) .

6 . n عدد طبيعي غير معدوم .

نسمي $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمات التي معادلاتها $y=0$ و $x=1$ و $x=n+1$.

أ) (u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ،

$u_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$ و المجموع $S_n=u_1+u_2+u_3+....+u_n$.

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $S_n=A(n)$.

ب) أحسب بـ cm^2 المساحة $A(n)$ بدلالة n .ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	 مجموع
التمرين الأول /1 $f'(x)=\frac{ax}{\sqrt{1+ax^2}}$ من أجل كل، $x\in[0;+\infty[$: $f'(x)\geq 0$ 0.5........ تقبل طرق أخرى . متزايدة تماما على $[0;+\infty[$		04.5
/2 (I أ)برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\leq u_n\leq\frac{1}{\sqrt{1-a}}$ **0.5........** **ب) متزايدة . 0.5 ......** **ج)متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ** $\frac{1}{\sqrt{1-a}}$ **فهي متقاربة .نهايتها** $\frac{1}{\sqrt{1-a}}$ 0.5...... (II $a>1$ .1 (v_n) متتالية هندسية أساسها a وحدها الأول $v_0=1$ **0.5..... ....** .2 $v_n=v_0.a^n=a^n$ **ومنه** $u_{n+1}^2-u_n^2=a^n$ **0.5..........** جـ) $S_n=1+a+a^2+a^3+......+a^{n-1}$ ، $n\geq 1$ **و من أجل كل** $S_0=0$ $S_n=\frac{a^n-1}{a-1}$ ، $n\geq 1$ **و من أجل كل** $S_0=0$ **0.5** $S_n=\frac{a^n-1}{a-1}$ ، n **ومنه من أجل كل عدد طبيعي** $S_n=1+a+a^2+a^3+......+a^{n-1}$ د) $S_n=u_1^2-u_0^2+u_2^2-u_1^2+u_3^2-u_2^2+......+u_n^2-u_{n-1}^2$ **ومنه** $u_n^2=S_n$ **وبالتالي** $u_n=\sqrt{S_n}$ **و** $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ 01.........		
التمرين الثاني: .1 $a=19$ **و** $b=9$ **0.5............** .2 أ) $19x-9y=3$ **فإن** $x\equiv 0[3]$. **0.5..........** **ب) الحل الخاص** $(x_0;y_0)=(3;6)$ **0.25............** **حلول المعادلة** $(x;y)=(9k+3;19k+6)$ **مع** k **عدد صحيح. 0.5..........** .3 أ) $d\|3$ **ومنه** $d\in\{1,3\}$ **0.5............** **ب) نضع** $p\gcd(x,y)=d$ **و** $p\gcd(y,3)=d'$ **0.75.........** **نجد** $d=d'$.	4.5	

ج) $\frac{y}{x}$ كسر قابلا للإختزال يكافئ $p\gcd(x,y)=3$ .... 0.5 عدد صحيح . p مع $(x;y)=(27p+3;57p+6)$ 4. $u_p=2+19p$ و $v_q=5+9q$ .... 01 ومنه $(p;q)=(9k+3;19k+6)$ يكافئ $19p-9q=3$ $u_p=v_q$ ومنه $(p;q)\in\{(3,6);(12,25)\}$		
التمرين الثالث: 1/ $p(A_0)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{2}{5}$ ، $p(A_1)=\frac{8}{15}$ ، $p(A_2)=\frac{1}{15}$ 0.75............		04
2/ أ) $p_{A_0}(B_0)=\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$ ، $p_{A_1}(B_0)=\frac{1}{2}$ ، $p_{A_2}(B_0)=1$ 0.75 .... ومنه $p(B_0)=\frac{2}{5}$ 0.5........ ب) $p(B_1)=\frac{8}{15}$ و $p(B_2)=\frac{1}{15}$ 0.5+0.5........ ج) $p_{B_1}(A_1)=\frac{p(A_1\cap B_1)}{p(B_1)}=\frac{p(A_1)p_{A_1}(B_1)}{p(B_1)}$ نجد $p_{B_1}(A_1)=\frac{1}{2}$ 0.5		
3/ $p(C)=p(A_0\cap B_2)+p(A_1\cap B_1)$ نجد $p(C)=\frac{1}{3}$ 0.5...........		

عناصر الإجابة	العلامة	
	مجزأة	مجموع
التمرين الرابع: I) 1.الدالة متناقصة تماما على $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ ومتزايدة تماما على $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ 0.25 .... من أجل كل عدد حقيقي x ، $xe^x\geq-\frac{1}{e}$. 0.25...... 2. $g'(x)=-(x^2+3x+2)e^x$ 0.25..... ومنه من أجل كل x من $]-\infty;0]$ ، $g(x)\geq0$ 0.25......		07

(II أ/1 f مستمرة عند 0 0.5........ من اليسار 0 قابلة للإشتقاق عند f ب) معدوم 0.25...... $f_g'(0)$ وعددها المشتق 0.25...... $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$ من اليمين لأن 0 غير قابلة للإشتقاق عند f يقبل نصف مماس من اليمين يوازي حامل محور التراتيب ونصف مماس من البسار يوازي حامل محور الفواصل 0.25.....		
x0.25 2 .... $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ أ.2 (II 0.25........... $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)] = 0$ ب) 0.5....... $]-1;0]$ على (Δ) ويقع أعلى $]-\infty;-1[$ على (Δ) يقع أسفل (C) ويقطعه في النقطة $A(-1,0)$		
0.25...$]-\infty;0]$ متزايدة تماما على f ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(xe^x+1)^2}$: $]-\infty;0]$ على أ.3 (II ، 0.25.................. $f'(x) = 1+\ln\left(\frac{x}{2}\right)$: $]0;+\infty[$ على 0.5........ ب)جدول التغيرات		
0.25........ $(T): y = \frac{e}{e-1}(x+1)$ أ.4 (II **0.5..... (T) بالنسبة إلى المماس (C) ب) وضعية المنحنى**		
0.75......... (C) و (Δ) ، (T) إنشاء .5 (II		
$S_n = \int_1^2 f(x) + \int_2^3 f(x) + ... + \int_n^{n+1} f(x)$ **0.25.........** $S_n = A(n)$ أ.6 (II **5.0..........** $A(n) = \left[4n + 2(n+1)^2\left[\ln\left(\frac{n+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right] + \ln(4e)\right] cm^2$ ب) $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} A(n) = +\infty$ **0.25.........**		